# Quantentheorie und fünfdimensionale Relativitätstheorie.

Von **Oskar Klein** in Kopenhagen.

(Eingegangen am 28. April 1926.)

Auf den folgenden Seiten möchte ich auf einen einfachen Zusammenhang hinweisen zwischen der von Kaluza [1]) vorgeschlagenen Theorie für den Zusammenhang zwischen Elektromagnetismus und Gravitation einerseits und der von de Broglie [2]) und Schrödinger [3]) angegebenen Methode zur Behandlung der Quantenprobleme andererseits. Die Theorie von Kaluza geht darauf hinaus, die zehn Einsteinschen Gravitationspotentiale $g_{ik}$ und die vier elektromagnetischen Potentiale $\varphi_i$ in Zusammenhang zu bringen mit den Koeffizienten $\gamma_{ik}$ eines Linienelementes von einem Riemannschen Raum, der außer den vier gewöhnlichen Dimensionen noch eine fünfte Dimension enthält. Die Bewegungsgleichungen der elektrischen Teilchen nehmen hierbei auch in elektromagnetischen Feldern die Gestalt von Gleichungen geodätischer Linien an. Wenn dieselben als Strahlengleichungen gedeutet werden, indem die Materie als eine Art Wellenausbreitung betrachtet wird, kommt man fast von selbst zu einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung, die als eine Verallgemeinerung der gewöhnlichen Wellengleichung angesehen werden kann. Werden nun solche Lösungen dieser Gleichung betrachtet, bei denen die fünfte Dimension rein harmonisch auftritt mit einer bestimmten mit der Planckschen Konstante zusammenhängenden Periode, so kommt man eben zu den obenerwähnten quantentheoretischen Methoden.

§ 1. Fünfdimensionale Relativitätstheorie. Ich fange damit an, eine kurze Darstellung von der fünfdimensionalen Relativitätstheorie zu geben, die sich nahe an die Theorie von Kaluza anschließt, aber in einigen Punkten von derselben abweicht.

Betrachten wir ein fünfdimensionales Riemannsches Linienelement, für welches wir einen vom Koordinatensystem unabhängigen Sinn postulieren. Wir schreiben dasselbe:

$$d\sigma = \sqrt{\Sigma \gamma_{ik}\, dx^i\, dx^k}, \tag{1}$$

wo das Zeichen $\Sigma$, wie überall im folgenden, eine Summation über die doppelt vorkommenden Indizes von 0 bis 4 angibt. Hierbei bezeichnen $x^0 \ldots x^4$ die fünf Koordinaten des Raumes. Die 15 Größen $\gamma_{ik}$ sind die kovarianten Komponenten eines fünfdimensionalen symmetrischen Tensors. Um von denselben zu den Größen $g_{ik}$ und $\varphi_i$ der gewöhnlichen Relativitätstheorie zu kommen, müssen wir gewisse spezielle Annahmen machen. Erstens müssen vier der Koordinaten, sagen wir $x^1$, $x^2$, $x^3$, $x^4$, stets den gewöhnlichen Zeitraum charakterisieren. Zweitens dürfen die Größen

[1]) Th. Kaluza, Sitzungsber. d. Berl. Akad. 1921, S. 966.
[2]) L. de Broglie, Ann. d. Phys. (10) **3**, 22, 1925. Thèses, Paris 1924.
[3]) E. Schrödinger, Ann. d. Phys. **79**, 361 und 489, 1926.

$\gamma_{ik}$ nicht von der fünften Koordinate $x^0$ abhängen. Hieraus folgt, daß die erlaubten Koordinatentransformationen sich auf die folgende Gruppe beschränken [1]):

$$\left.\begin{aligned} x^0 &= x^{0\prime} + \psi_0(x^{1\prime}, x^{2\prime}, x^{3\prime}, x^{4\prime}), \\ x^i &= \psi_i(x^{1\prime}, x^{2\prime}, x^{3\prime}, x^{4\prime}) \qquad (i = 1, 2, 3, 4). \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Eigentlich hätten wir in der ersten Gleichung Konstante mal $x^{0\prime}$ anstatt $x^{0\prime}$ schreiben sollen. Die Beschränkung auf den Wert Eins der Konstante ist ja aber ganz unwesentlich.

Wie man leicht zeigt, bleibt $\gamma_{00}$ bei den Transformationen (2) invariant. Die Annahme $\gamma_{00} = \text{Const.}$ ist deshalb zulässig. Die Vermutung liegt nahe, daß nur die Verhältnisse der $\gamma_{ik}$ einen physikalischen Sinn haben. Dann ist diese Annahme nur eine immer mögliche Konvention. Indem wir die Maßeinheit von $x^0$ vorläufig unbestimmt lassen, setzen wir:

$$\gamma_{00} = \alpha. \tag{3}$$

Man zeigt ferner, daß die folgenden Differentialgrößen bei den Transformationen (2) invariant bleiben, nämlich [1]):

$$d\vartheta = dx^0 + \frac{\gamma_{0i}}{\gamma_{00}}\, dx^i, \tag{4}$$

$$ds^2 = \left(\gamma_{ik} - \frac{\gamma_{0i}\gamma_{0k}}{\gamma_{00}}\right) dx^i\, dx^k. \tag{5}$$

In diesen Ausdrücken soll über die doppelt vorkommenden Indizes von 1 bis 4 summiert werden. Bei solchen Summen wollen wir, wie üblich, das Summenzeichen fortlassen. Die Größen $d\vartheta$ und $ds$ hängen in der folgenden Weise mit dem Linienelement $d\sigma$ zusammen:

$$d\sigma^2 = \alpha\, d\vartheta^2 + ds^2. \tag{6}$$

Auf Grund der Invarianz von $d\vartheta$ und $\gamma_{00}$ folgt nun, daß die vier $\gamma_{0i}$ ($i \neq 0$), wenn $x^0$ festgehalten wird, sich wie die kovarianten Komponenten eines gewöhnlichen Vierervektors transformieren. Wenn $x^0$ mittransformiert wird, tritt noch der Gradient eines Skalars additiv hinzu. Dies bedeutet, daß die Größen:

$$\frac{\partial \gamma_{0i}}{\partial x^k} - \frac{\partial \gamma_{0k}}{\partial x^i}$$

[1]) Vgl. H. A. Kramers, Proc. Amsterdam **23**, Nr. 7, 1922, wo eine an die nun folgenden Betrachtungen erinnernde Überlegung mit einem einfachen Beweis für die Invarianz von $d\vartheta$ und $ds^2$ gegeben ist.

sich wie die kovarianten Komponenten $F_{ik}$ des elektromagnetischen Feldtensors transformieren. Die Größen $\gamma_{0i}$ verhalten sich also vom invariantentheoretischen Gesichtspunkt wie die elektromagnetischen Potentiale $\varphi_i$. Wir nehmen deshalb an:

$$d\vartheta = dx^0 + \beta\,\varphi_i\,dx^i, \tag{7}$$

d. h.

$$\gamma_{0i} = \alpha\beta\,\varphi_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4), \tag{8}$$

wo $\beta$ eine Konstante bedeutet, und wo die $\varphi_i$ so definiert sind, daß in rechtwinkligen Galileischen Koordinaten gilt:

$$\left.\begin{aligned}(\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z) &= A,\\ \varphi_z &= -cV,\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

wo $A$ das gewöhnliche Vektorpotential, $V$ das gewöhnliche skalare Potential und $c$ die Lichtgeschwindigkeit bezeichnen.

Die Differentialform $ds$ wollen wir mit dem Linienelement der gewöhnlichen Relativitätstheorie identifizieren. Wir setzen also

$$\gamma_{ik} = g_{ik} + \alpha\beta^2\,\varphi_i\,\varphi_k, \tag{10}$$

wobei wir die $g_{ik}$ so wählen wollen, daß in rechtwinkligen Galileischen Koordinaten gilt:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2\,dt^2. \tag{11}$$

Hiermit sind die Größen $\gamma_{ik}$ auf bekannte Größen zurückgeführt. Das Problem ist nun, solche Feldgleichungen für die Größen $\gamma_{ik}$ aufzustellen, daß sich für die $g_{ik}$ und $\varphi_i$ in genügender Annäherung die Feldgleichungen der gewöhnlichen Relativitätstheorie ergeben. Auf dieses schwierige Problem wollen wir hier nicht näher eingehen, sondern wir wollen nur zeigen, daß die gewöhnlichen Feldgleichungen von dem Gesichtspunkt der fünfdimensionalen Geometrie sich einfach zusammenfassen lassen. Wir bilden die Invariante:

$$P = \sum \gamma^{ik}\left[\frac{\partial \begin{Bmatrix} i\,\mu \\ \mu \end{Bmatrix}}{\partial x^k} - \frac{\partial \begin{Bmatrix} i\,k \\ \mu \end{Bmatrix}}{\partial x^\mu} + \begin{Bmatrix} i\,\mu \\ \nu \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} k\,\nu \\ \mu \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} i\,k \\ \mu \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} \mu\,\nu \\ \nu \end{Bmatrix}\right], \tag{12}$$

wo $\gamma^{ik}$ die kontravarianten Komponenten des fünfdimensionalen metrischen Fundamentaltensors sind und wo $\begin{Bmatrix} r\,s \\ i \end{Bmatrix}$ die Christoffelschen Dreiindizessymbole bezeichnen, also:

$$\begin{Bmatrix} r\,s \\ i \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\sum \gamma^{i\mu}\left(\frac{\partial\gamma_{\mu r}}{\partial x^s} + \frac{\partial\gamma_{\mu s}}{\partial x^r} - \frac{\partial\gamma_{rs}}{\partial x^\mu}\right). \tag{13}$$

In dem Ausdruck von $P$ denken wir uns, daß alle Größen von $x^0$ unabhängig sind, und daß $\gamma_{00} = \alpha$ ist.

Betrachten wir nun das über ein geschlossenes Gebiet des fünfdimensionalen Raumes ausgeführte Integral:

$$J = \int P \sqrt{-\gamma}\, d x^0\, d x^1\, d x^2\, d x^3\, d x^4, \tag{14}$$

wo $\gamma$ die Determinante der $\gamma_{ik}$ bedeutet.

Wir bilden $\delta J$ durch Variieren der Größen $\gamma_{ik}$ und $\frac{\partial \gamma_{ik}}{\partial x^l}$, wobei deren Randwerte nicht verändert werden sollen. Hierbei soll $\alpha$ als eine Konstante betrachtet werden. Das Variationsprinzip:

$$\delta J = 0 \tag{15}$$

führt dann zu den folgenden Gleichungen:

$$R^{ik} - \frac{1}{2} g^{ik} R + \frac{\alpha \beta^2}{2} S^{ik} = 0 \quad (i, k = 1, 2, 3, 4) \tag{16a}$$

und

$$\frac{\partial \sqrt{-g}\, F^{i\mu}}{\partial x^\mu} = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4), \tag{16b}$$

wo $R$ die Einsteinsche Krümmungsinvariante, $R^{ik}$ die kontravarianten Komponenten des Einsteinschen Krümmungstensors, $g^{ik}$ die kontravarianten Komponenten des Einsteinschen Fundamentaltensors, $S^{ik}$ die kontravarianten Komponenten des elektromagnetischen Energie-Impulstensors, $g$ die Determinante der $g_{ik}$ und schließlich $F^{i\mu}$ die kontravarianten Komponenten des elektromagnetischen Feldtensors bedeuten. Setzen wir

$$\frac{\alpha \beta^2}{2} = \varkappa, \tag{17}$$

wo $\varkappa$ die von Einstein gebrauchte Gravitationskonstante bedeutet, so sehen wir, daß die Gleichungen (16a) in der Tat mit den Gleichungen der Relativitätstheorie für das Gravitationsfeld und (16b) mit den generalisierten Maxwellschen Gleichungen der Relativitätstheorie identisch sind für einen materiefreien Feldpunkt[1]).

Wenn wir uns auf die in der Elektronentheorie und der Relativitätstheorie übliche schematische Behandlungsweise der Materie beschränken, können wir die gewöhnlichen Gleichungen für den nicht materiefreien Fall in ähnlicher Weise erhalten. Wir ersetzen $P$ in (14) durch

$$P + \varkappa \Sigma \gamma_{ik} \Theta^{ik}.$$

Um die $\Theta^{ik}$ zu definieren, wollen wir erst den auf ein Elektron oder einen Wasserstoffkern bezüglichen Tensor:

$$\vartheta^{ik} = \frac{d x^i}{d l} \frac{d x^k}{d l} \tag{18}$$

[1]) Siehe z. B. W. Pauli, Relativitätstheorie, S. 719 und 724.

betrachten, wo $dx^i$ die Lageänderungen des Teilchens bezeichnen, und $dl$ ein gewisses invariantes Differential bedeutet. Die $\Theta^{ik}$ sollen gleich der auf die Volumeneinheit bezogenen Summe der $\vartheta^{ik}$ für die verschiedenen Teilchen sein. Wir kommen dann wieder zu Gleichungen vom gewöhnlichen Typus, die mit den gewöhnlichen Feldgleichungen identisch werden, wenn wir setzen:

$$v_0 \frac{d\tau}{dl} = \pm \frac{e}{\beta c}, \tag{19}$$

$$\frac{d\tau}{dl} = \begin{cases} \sqrt{M} \\ \sqrt{m} \end{cases}, \tag{20}$$

wo allgemein

$$v_i = \Sigma \gamma_{i\mu} \frac{dx^\mu}{dl} \tag{21}$$

die kovarianten Komponenten des fünfdimensionalen Geschwindigkeitsvektors $v^i$ sind, wo

$$v^i = \frac{dx^i}{dl}. \tag{22}$$

Ferner bedeuten $e$ das elektrische Elementarquantum, $M$ und $m$ die Massen von Wasserstoffkern bzw. Elektron. Dabei gilt das obere Wertsystem für den Kern, das untere für das Elektron. Weiter ist

$$d\tau = \frac{1}{c} \sqrt{-ds^2}$$

das Differential der Eigenzeit.

Aus den Feldgleichungen folgen natürlich auf gewöhnliche Weise die Bewegungsgleichungen für materielle Teilchen und die Kontinuitätsgleichung. Die Rechnungen, die dazu führen, können von unserem Standpunkt aus einfach zusammengefaßt werden. Wie man leicht sieht, sind nämlich unsere Feldgleichungen mit den folgenden 14 Gleichungen äquivalent:

$$P^{ik} - \tfrac{1}{2}\gamma^{ik} P + \varkappa \Theta^{ik} = 0 \tag{23}$$

($i, k = 0, 1, 2, 3, 4$, aber nicht beide Null), wo die $P^{ik}$ die kontravarianten Komponenten des verjüngten fünfdimensionalen Krümmungstensors sind (den $R^{ik}$ entsprechend). Die in Frage stehenden Gleichungen folgen nun durch Divergenzbildung von (23). Hieraus folgt, daß sich die elektrischen Teilchen auf fünfdimensionalen geodätischen Linien bewegen, die den Bedingungen (19) und (20) genügen[1]. Wie man

[1] Die speziellen Werte von $\frac{d\tau}{dl}$ sind natürlich in diesem Zusammenhang ohne Bedeutung. Wesentlich ist hier nur $\frac{d\tau}{dl} = \text{const.}$

sofort sieht, sind diese Bedingungen eben deshalb mit den Gleichungen der geodätischen Linien verträglich, weil $x^0$ in den $\gamma_{ik}$ nicht vorkommt.

Es muß hier daran erinnert werden, daß wohl keine genügenden Gründe für die exakte Gültigkeit der Einsteinschen Feldgleichungen vorliegen. Immerhin möchte es nicht ohne Interesse sein, daß sich sämtliche 14 Feldgleichungen in so einfacher Weise vom Standpunkt der Theorie von Kaluza zusammenfassen lassen.

§ 2. Die Wellengleichung der Quantentheorie. Wir gehen nun dazu über, die Theorie der stationären Zustände und die damit zusammenhängenden charakteristischen Abweichungen von der Mechanik, die in der neueren Quantentheorie zum Vorschein kommen, in Beziehung zu der fünfdimensionalen Relativitätstheorie zu bringen. Betrachten wir zu diesem Zweck die folgende Differentialgleichung, die sich auf unseren fünfdimensionalen Raum beziehen soll und als eine einfache Verallgemeinerung der Wellengleichung betrachtet werden kann:

$$\sum a^{ik}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^i \partial x^k} - \sum \begin{Bmatrix} i\,k \\ r \end{Bmatrix} \frac{\partial U}{\partial x^r}\right) = 0. \tag{24}$$

Hier bedeuten die $a^{ik}$ die kontravarianten Komponenten eines fünfdimensionalen symmetrischen Tensors, die gewisse Funktionen der Koordinaten sein sollen. Die Gleichung (24) besteht unabhängig vom Koordinatensystem.

Betrachten wir erst eine durch (24) bestimmte Wellenausbreitung, die dem Grenzfall der geometrischen Optik entspricht. Wir kommen dazu, wenn wir setzen:

$$u = A\, e^{i\omega\Phi} \tag{25}$$

und $\omega$ als so groß annehmen, daß in (24) nur die mit $\omega^2$ proportionalen Glieder berücksichtigt zu werden brauchen. Wir bekommen dann:

$$\sum a^{ik} \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} \frac{\partial \Phi}{\partial x^k} = 0, \tag{26}$$

eine Gleichung, die der Hamilton-Jacobischen partiellen Differentialgleichung der Mechanik entspricht. Setzen wir

$$p_i = \frac{\partial \Phi}{\partial x^i}, \tag{27}$$

so können die Differentialgleichungen der Strahlen bekanntlich in der folgenden Hamiltonschen Form geschrieben werden:

$$\frac{d p_i}{-\dfrac{\partial H}{\partial x^i}} = \frac{d x^i}{\dfrac{\partial H}{\partial p_i}} = d\lambda, \tag{28}$$

wo
$$H = \frac{1}{2} \sum a^{ik} p_i p_k. \tag{29}$$

Aus (26) folgt noch
$$H = 0. \tag{30}$$

Eine andere Darstellung dieser Gleichungen, die der **Lagrange**schen Form entspricht, ergibt sich durch den Umstand, daß die Strahlen als geodätische Nullinien der Differentialform:
$$\sum a_{ik} d x^i d x^k$$
betrachtet werden können, wo die $a_{ik}$ die zu den $a^{ik}$ reziproken Größen bedeuten, also
$$\sum a_{i\mu} a^{k\mu} = \delta_i^k = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases}. \tag{31}$$

Setzen wir nun
$$\sum a_{ik} d x^i d x^k = \mu (d\vartheta)^2 + d s^2, \tag{32}$$
so können wir durch passende Wahl der Konstante $\mu$ erreichen, daß unsere Strahlengleichungen mit den Bewegungsgleichungen elektrischer Teilchen identisch werden. Setzen wir, um dies einzusehen:
$$L = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{d\vartheta}{d\lambda}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{d s}{d\lambda}\right)^2, \tag{33}$$
so folgt
$$p_0 = \frac{\partial L}{\partial \frac{d x^0}{d\lambda}} = \mu \frac{d\vartheta}{d\lambda} \tag{34}$$
und
$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \frac{d x_i}{d\lambda}} = u_i \frac{d\tau}{d\lambda} + \beta p_0 \varphi_i \quad (i = 1, 2, 3, 4), \tag{35}$$
wo $u_1 \dots u_4$ die kovarianten Komponenten des gewöhnlichen Geschwindigkeitsvektors bedeuten.

Die Strahlengleichungen lauten nun:
$$\frac{d p_0}{d\lambda} = 0, \tag{36 a}$$
$$\frac{d p_i}{d\lambda} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^i} \frac{d x^\mu}{d^\lambda} \frac{d x^\nu}{d\lambda} + \beta p_0 \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x^i} \frac{d x^\mu}{d\lambda} \quad (i = 1, 2, 3, 4). \tag{36}$$

Aus
$$\mu d\vartheta^2 + d s^2 = \mu d\vartheta^2 - c^2 d\tau^2 = 0$$
ergibt sich
$$\mu \frac{d\vartheta}{d\tau} = c \sqrt{\mu}. \tag{37}$$

Da nach (34) und (36 a) $\frac{d\vartheta}{d\lambda}$ und also auch $\frac{d\tau}{d\lambda}$ konstant ist, können wir $\lambda$ so wählen, daß

$$\frac{d\tau}{d\lambda} = \begin{cases} M \text{ für den Wasserstoffkern,} \\ m \text{ für das Elektron.} \end{cases} \tag{38}$$

Ferner müssen wir, um zu den gewöhnlichen Bewegungsgleichungen zu gelangen, annehmen:

$$\beta p_0 = \begin{cases} +\frac{e}{c} \text{ für den Wasserstoffkern,} \\ -\frac{e}{c} \text{ für das Elektron.} \end{cases} \tag{39}$$

Aus (37) ergibt sich dann:

$$\mu = \begin{cases} \frac{e^2}{\beta^2 M^2 c^4} \text{ für den Wasserstoffkern,} \\ \frac{e^2}{\beta^2 m^2 c^4} \text{ für das Elektron.} \end{cases} \tag{40}$$

Die Gleichungen (35), (36) stimmen dann mit den gewöhnlichen Bewegungsgleichungen elektrischer Teilchen in Gravitationsfeldern und elektromagnetischen Feldern vollständig überein. Insbesondere sind die nach (35) definierten Größen $p_i$ identisch mit den auf gewöhnliche Weise definierten generalisierten Momenten, was für die folgenden Überlegungen wichtig ist. Da wir $\beta$ noch beliebig wählen können, wollen wir setzen:

$$\beta = \frac{e}{c}. \tag{41}$$

Es ergibt sich dann einfach:

$$p_0 = \begin{cases} +1 \text{ für den Wasserstoffkern,} \\ -1 \text{ für das Elektron,} \end{cases} \tag{39a}$$

und

$$\mu = \begin{cases} \frac{1}{M^2 c^2} \text{ für den Wasserstoffkern,} \\ \frac{1}{m^2 c^2} \text{ für das Elektron.} \end{cases} \tag{40a}$$

Wie man sieht, müssen wir in (37) für die Quadratwurzel das positive Zeichen im Falle des Kerns und das negative Zeichen im Falle des Elektrons wählen. Dies ist ja wenig befriedigend. Die Tatsache aber, daß man bei einem einzigen Werte von $\mu$ zwei verschiedene Klassen von Strahlen erhält, die sich gewissermaßen wie die positiven und negativen elektrischen Teilchen zueinander verhalten, könnte als ein Hinweis darauf angesehen werden, daß es vielleicht möglich ist, die Wellengleichung so abzuändern, daß sich die Bewegungsgleichungen beider Arten von Teilchen aus einem einzigen Wertsystem der Koeffizienten ergeben. Auf diese Frage wollen wir jetzt nicht weiter eingehen, sondern wir wollen dazu übergehen, die aus (32) folgende Wellengleichung im Falle des Elektrons etwas näher zu betrachten.

Da für das Elektron $p_0 = -1$ angenommen wurde, müssen wir nach (27) setzen:

$$\Phi = -x^0 + S(x^1, x^2, x^3, x^4). \tag{42}$$

Die Theorie von de Broglie ergibt sich nun, wenn wir die mit der Wellengleichung verträglichen, einem bestimmten Wert von $\omega$ entsprechenden stehenden Schwingungen aufsuchen, und dabei annehmen, daß die Wellenausbreitung nach den Gesetzen der geometrischen Optik vor sich geht. Dazu bedürfen wir des wohlbekannten Satzes von der Erhaltung der Phase, der sich sofort aus (28 und (30) ergibt. Es folgt nämlich:

$$\frac{d\Phi}{d\lambda} = \sum \frac{\partial \Phi}{\partial x^i}\frac{d x^i}{d\lambda} = \sum p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} = 2H = 0. \tag{43}$$

Die Phase wird also von der Welle mitgeführt. Betrachten wir nun den einfachen Fall, wo sich $\Phi$ in zwei Teile spalten läßt, von denen der eine Teil nur von einer einzigen Koordinate, sagen wir $x$, abhängt, die mit der Zeit periodisch hin und her schwingt. Es wird dann eine stehende Schwingung möglich sein, die dadurch charakterisiert wird, daß eine in einem gewissen Augenblick durch (25) dargestellte harmonische Welle nach einer Periode von $x$ mit derjenigen Welle in Phase zusammentrifft, die sich aus derselben Lösung (25) durch Einsetzen der neuen Werte von $x^0$, $x^2$, $x^3$, $x^4$ ergibt. Wegen der Erhaltung der Phase ist die Bedingung dafür einfach:

$$\omega \oint p\, d x = n \,.\, 2\pi, \tag{44}$$

wo $n$ eine ganze Zahl bedeutet. Setzen wir:

$$\omega = \frac{2\pi}{h}, \tag{45}$$

wo $h$ die Plancksche Konstante bedeutet, so ergibt sich also die gewöhnliche Quantenbedingung für eine separierbare Koordinate. Ähnliches gilt natürlich für ein beliebiges Periodizitätssystem. Die gewöhnliche Quantentheorie der Periodizitätssysteme entspricht also vollständig der Behandlung der Interferenzerscheinungen mittels der Annahme, daß sich die Wellen nach den Gesetzen der geometrischen Optik ausbreiten. Es mag noch hervorgehoben werden, daß wegen (42) die Beziehungen (44), (45) bei den Koordinatentransformationen (2) invariant bleiben.

Betrachten wir nun auch die Gleichung (24) in dem Falle, wo $\omega$ nicht so groß ist, daß wir nur die in $\omega$ quadratischen Glieder zu berücksichtigen brauchen. Wir beschränken uns dabei auf den einfachen Fall eines elektrostatischen Feldes. Dann haben wir in kartesischen Koordinaten:

$$\left.\begin{aligned} d\vartheta &= dx^0 - eV\,dt, \\ ds^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2\,dt^2. \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

Also ergibt sich:

$$H = \frac{1}{2}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right) - \frac{1}{2c^2}\left(p_t + eVp_0\right)^2 + \frac{m^2c^2}{2}p_0^2. \tag{47}$$

In der Gleichung (24) können wir nun die mit $\left\{\begin{matrix} i\,k \\ r \end{matrix}\right\}$ proportionalen Größen vernachlässigen, denn die Dreiindizessymbole sind in diesem Falle nach (17) kleine mit der Gravitationskonstante $\varkappa$ proportionale Größen. Wir bekommen also [1]):

$$\varDelta U - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{2eV}{c^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t\,\partial x^0} + \left(m^2c^2 - \frac{e^2V^2}{c^2}\right)\frac{\partial^2 U}{\partial x^{0\,2}} = 0. \tag{48}$$

Für $U$ können wir, da $V$ nur von $x$, $y$, $z$ abhängt, in Übereinstimmung mit (42) und (45) ansetzen:

$$U = e^{-2\pi i\left(\frac{x^0}{h} - \nu t\right)}\,\psi(x, y, z). \tag{49}$$

Dies in (48) eingeführt, ergibt:

$$\varDelta\psi + \frac{4\pi^2}{c^2h^2}\left[(h\nu - eV)^2 - m^2c^4\right]\psi = 0. \tag{50}$$

Setzen wir noch:

$$h\nu = mc^2 + E, \tag{51}$$

so bekommen wir die von Schrödinger [2]) gegebene Gleichung, deren stehende Schwingungen bekanntlich Werten von $E$ entsprechen, die mit

---

[1]) Außer durch das Auftreten von $x^0$, das ja für die Anwendungen unwesentlich ist, unterscheidet sich diese Gleichung von der Schrödingerschen Gleichung durch die Art, in welcher in (48) die Zeit auftritt. Als eine Stütze für diese Form der Quantengleichung kann angeführt werden, daß dieselbe in dem Fall, wo $V$ harmonisch von der Zeit abhängt, wie man durch eine einfache Störungsrechnung zeigen kann, Lösungen besitzt, die sich in ähnlicher Weise zu der Dispersionstheorie von Kramers verhalten wie die Schrödingerschen Lösungen zu der Quantentheorie der Spektrallinien. Diese Bemerkung verdanke ich Dr. W. Heisenberg.

[2]) Schrödinger, l. c.

den aus der Heisenbergschen Quantentheorie berechneten Energiewerten identisch sind. Wie man sieht, ist $E$ in dem Grenzfall der geometrischen Optik gleich der auf gewöhnliche Weise definierten mechanischen Energie. Die Frequenzbedingung besagt, wie Schrödinger hervorgehoben hat, nach (51), daß die zu dem System gehörenden Lichtfrequenzen den aus den verschiedenen Werten der Frequenz $\nu$ gebildeten Differenzen gleich sind.

§ 3. Schlußbemerkungen. Wie die Arbeiten von de Broglie sind obenstehende Überlegungen aus dem Bestreben entstanden, die Analogie zwischen Mechanik und Optik, die in der Hamiltonschen Methode zum Vorschein kommt, für ein tieferes Verständnis der Quantenerscheinungen auszunutzen. Daß dieser Analogie ein reeller physikalischer Sinn zukommt, scheint ja die Ähnlichkeit der Bedingungen für die stationären Zustände von Atomsystemen mit den Interferenzerscheinungen der Optik anzudeuten. Nun stehen bekanntlich Begriffe wie Punktladung und materieller Punkt schon der klassischen Feldphysik fremd gegenüber. Auch wurde ja öfters die Hypothese ausgesprochen, daß die materiellen Teilchen als spezielle Lösungen der Feldgleichungen aufzufassen sind, welche das Gravitationsfeld und das elektromagnetische Feld bestimmen. Es liegt nahe, die genannte Analogie zu dieser Vorstellung in Beziehung zu bringen. Denn nach dieser Hypothese ist es ja nicht so befremdend, daß die Bewegung der materiellen Teilchen Ähnlichkeiten aufweist mit der Ausbreitung von Wellen. Die in Rede stehende Analogie ist jedoch unvollständig, solange man eine Wellenausbreitung in einem Raum von nur vier Dimensionen betrachtet. Dies kommt schon in der variablen Geschwindigkeit der materiellen Teilchen zum Vorschein. Denkt man sich aber die beobachtete Bewegung als eine Art Projektion auf den Zeitraum von einer Wellenausbreitung, die in einem Raum von fünf Dimensionen stattfindet, so läßt sich, wie wir sahen, die Analogie vollständig machen. Mathematisch ausgedrückt heißt dies, daß die Hamilton-Jacobische Gleichung nicht als Charakteristikengleichung einer vierdimensionalen, wohl aber einer fünfdimensionalen Wellengleichung aufgefaßt werden kann. In dieser Weise wird man zu der Theorie von Kaluza geführt.

Obwohl die Einführung einer fünften Dimension in unsere physikalischen Betrachtungen von vornherein befremdend sein mag, wird eine radikale Modifikation der den Feldgleichungen zugrunde gelegten Geometrie doch wieder in ganz anderer Weise durch die Quantentheorie nahegelegt. Denn es ist bekanntlich immer weniger wahrscheinlich geworden, daß die Quantenerscheinungen eine einheitliche raumzeitliche Beschreibung zulassen, wogegen die Möglichkeit, diese Erscheinungen durch ein System von fünfdimensionalen Feldgleichungen darzustellen, wohl nicht von vornherein auszuschließen ist[1]). Ob hinter diesen Andeutungen von Möglichkeiten etwas Wirkliches besteht, muß natürlich die Zukunft entscheiden. Jedenfalls muß betont werden, daß die in dieser Note versuchte Behandlungsweise, sowohl was die Feldgleichungen als auch die Theorie der stationären Zustände betrifft, als ganz provisorisch zu betrachten ist. Dies kommt wohl besonders in der auf S. 898 erwähnten schematischen Behandlungsweise der Materie zum Vorschein, sowie in dem Umstand, daß die zwei Arten von elektrischen Teilchen durch verschiedene Gleichungen vom Schrödingerschen Typus behandelt werden. Auch wird die Frage ganz offen gelassen, ob man sich bei der Beschreibung der physikalischen Vorgänge mit den 14 Potentialen begnügen kann, oder ob die Schrödingersche Methode die Einführung einer neuen Zustandsgröße bedeutet.

Mit den in dieser Note mitgeteilten Überlegungen habe ich mich sowohl in dem Physikalischen Institut der University of Michigan, Ann Arbor, wie in dem hiesigen Institut für theoretische Physik beschäftigt. Ich möchte auch an dieser Stelle Prof. H. M. Randall und Prof. N. Bohr meinen wärmsten Dank aussprechen.

[1]) Bemerkungen dieser Art, die Prof. Bohr bei mehreren Gelegenheiten gemacht hat, haben einen entschiedenen Einfluß auf das Entstehen der vorliegenden Note gehabt.